# 多跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向弯曲振动频率的计算

冀 伟<sup>1,2</sup>,邓 露<sup>1</sup>,刘世忠<sup>2</sup>,蔺鹏臻<sup>2</sup>

(1. 湖南大学 土木工程学院,长沙 410082; 2. 兰州交通大学 土木工程学院,兰州 730070)

**摘 要:**为合理计算多跨(跨度相等)等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥的竖向弯曲振动频率,运用能量变分原 理、Hamilton 原理及力法方程,建立了该类型箱梁在发生自由弯曲振动时考虑箱梁剪力滞效应、波形钢腹板剪切效应及两 者耦合效应的频率方程。求解该频率方程获得了多跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向弯曲振动频率的求解公式, 所得计算公式的正确性得到了室内模型试验实测值、已建实桥实测值和三维有限元值的验证。随后分析了箱梁剪力滞效 应、波形钢腹板剪切效应、波形钢腹板剪切模量修正、箱梁宽跨比变化以及不同波形形状对等截面波形钢腹板 PC 连续箱 梁竖向弯曲振动频率的影响。所得结论可为同类型桥梁的竖向弯曲振动频率的计算提供参考。

**关键词:** 波形钢腹板; 竖向弯曲振动频率; 能量变分法; 桥梁工程; 组合箱梁 中图分类号: U441 + . 3 **文献标志码:** A DOI: 10.13465 / j. cnki. jvs. 2016. 18.023

## Calculation of the vertical bending vibration frequencies of multi-span PC continuous box girder with corrugated steel webs of uniform cross-section

JI Wei<sup>1,2</sup>, DENG Lu<sup>1</sup>, LIU Shizhong<sup>2</sup>, LIN Pengzhen<sup>2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. College of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract**: In order to calculate the vertical bending vibration frequencies of a multi-span PC continuous box girder with corrugated steel webs (CSWs) of uniform cross-section, using the energy variation principle, Hamilton principle and force method equations, the equations of vertical bending vibration frequency were established. The influences of shear lag effect, shear deformation effect of CSWs and their coupling effect were considered in the equations. By solving the equations, the calculation formulas for the bending vibration frequencies of PC continuous box girder with CSWs were presented. Comparing the results with those of the finite element analysis and the measured values obtained in the tests of an indoor model and built bridges, the validity of the formulas was proved. The influences of the shear lag effect, shear deformation frequencies of this type of bridges were also analyzed. The conclusions can provide valuable references to the calculation of vertical bending vibration frequencies of multi-span PC continuous box girders with CSWs of uniform cross-section in practice.

Key words: corrugated steel web; vertical bending vibration frequency; energy variation principle; bridge engineering; composite box girder

波形钢腹板 PC 箱梁桥是一种新型的钢 - 混组合 结构桥梁,该类型桥梁具有自重轻,预应力施加效率 高,腹板抗剪强度高等优点,已经在国内外的桥梁建设 中得到了广泛使用。 现有的研究文献表明,国外学者对波形钢板及波 形钢腹板 I 型钢梁的研究较多,研究内容主要集中在 这两种结构的抗剪、抗弯和屈曲性能方面<sup>[1-9]</sup>;国内学 者则对波形钢腹板 PC 箱梁桥的研究较多,研究内容主 要集中在波形钢腹板 PC 箱梁抗弯、剪切及抗扭等力学 性能方面<sup>[10-15]</sup>。

"公路桥涵设计通用规范: JTG D60—2015"<sup>[16]</sup> 中 规定桥梁结构的冲击系数可由桥梁结构的竖向基频获 得,但规范中却没有针对波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖 向弯曲振动频率的计算公式。为此,本文为合理计算

基金项目: 国家自然科学基金(51368032);中国博士后科学基金 (2014M562103);甘肃省高等学校科研项目(2015A-053);甘肃省 基础研究创新群体项目资助(1506RJIA029) 收稿日期: 2015-03-31 修改稿收到日期: 2015-09-07 第一作者 冀伟 男,博士,副教授,1982 年生 通信作者 邓露 男,博士,教授,1984 年生

多跨(均指跨度相等的多跨)等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁的竖向弯曲振动频率,运用能量变分原理、Hamilton 原理及力法方程,推导出了该类型结构连续箱梁 桥竖向弯曲振动频率的计算公式;采用室内模型试验 实测值、已建实桥的实测值和三维有限元计算值验证 了所得计算公式的正确性,在此基础上分析了箱梁剪 力滞效应、波形钢腹板剪切效应、波形钢腹板剪切模量 修正、箱梁宽跨比变化以及不同波形形状对多跨等截 面波形钢腹板 PC 连续箱梁竖向弯曲振动频率的影响。 本研究结论可为实际工程多跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向弯曲振动频率的计算提供参考。

#### 1 波形钢腹板的形状构造与剪切模量修正

波形钢腹板的形状见图 1。由于波形钢腹板的特殊形状使其在桥梁纵向的有效弹性模量(抗拉、抗弯) 很小,几乎不能承受轴力与弯矩,可以忽略其在纵向抗 弯刚度<sup>[17]</sup>。

波形钢腹板剪切模量的计算与其波形的几何形状 有关<sup>[18]</sup>,其剪切模量 G<sub>s</sub>相应的计算公式见式(1)。

$$G_{\rm s} = \alpha \frac{E_{\rm s}}{2(1+v_{\rm s})} \tag{1}$$

式中:  $\alpha = (L_1 + L_3) / (L_1 + L_2)$  为剪切模量的修正系数;  $E_s = v_s$  分别为钢材的弹性模量和泊松比;  $L_1 \setminus L_2 = L_3$ 分别为波形钢腹板的平板段长度、斜板段的投影长度 及斜板段长度(见图1)。国内外实际工程中最常用的 波形钢腹板形状及相应的修正系数见表1。



图 1 波形钢腹板的几何形状示意图 Fig. 1 Geometric shape of CSW

表1 波形钢腹板形状与修正系数

 Tab. 1 The shape parameters and correction

 coefficients of the corrugated steel web

波形	波形形状/mm			做工至粉
钢腹板型号	$L_1$	$L_2$	$L_3$	修正示奴
1000 型	340	160	226	0.8834
1200 型	330	270	330	0.909 1
1600 型	430	370	430	0.930 2

由表1可知,波形形状对波形钢腹板剪切模量的 影响显著。1600型波形钢腹板的波形形状对其剪切模 量影响较小,1000型波形钢腹板的波形形状对其剪切 模量影响较大,但是否考虑剪切模量的修正对波形钢 腹板 PC 连续箱梁竖向弯曲振动频率的影响是未知的, 因此在随后的分析中给出了剪切模量修正与否对该类 型桥梁竖向弯曲振动频率的影响。

#### 2 弯曲振动方程的建立

#### 2.1 基本假定

(1)由于波形钢腹板在桥梁纵向具有手风琴效应,忽略其在纵向的抗弯作用。

(2) 波形钢腹板 PC 箱梁桥在纵向弯曲受力时,横截面的"拟平截面假定"成立<sup>[19]</sup>。

(3) 在图 2 所示坐标系下,在计算波形钢腹板 PC 箱梁上、下翼板的应变能时,假定上、下翼板的竖向应 变、横向应变及板平面外的剪应变可忽略不计,即  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ,只考虑上、下翼板的纵向应变  $\varepsilon_x$  与横 截面面剪切应变  $\gamma_{xy}$ 。

(4) 波形钢腹板与混凝土上、下翼板在弹性范围 内完全共同工作,不产生相对滑移。

(5) 波形钢腹板承受全部剪力,在运用能量变分 法时,需要考虑其剪切应变能。

在图2所示坐标系下,h<sub>u</sub>与h<sub>1</sub>分别为混凝土上、下 翼板中心到中性轴距离; b 与 ζb 分别为箱中混凝土翼 板净跨的一半和悬臂板长度。



图 2 波形钢腹板 PC 箱梁的横截面示意图 Fig. 2 Cross section of the PC box girder with CSWs

波形钢腹板 PC 箱梁桥发生自由竖向弯曲振动时, 由于剪力滞效应已不服从初等梁理论的平截面假定, 因此引入两个动挠度的概念来描述其位移模式,即梁 的竖向动挠度 W 与纵向动位移函数 U<sup>[20]</sup>:

$$W = W(x,t) \tag{2}$$

 $U(x,y,z,t) = h_i \left[ \varphi(x,t) + (1 - \vec{y}) \xi(x,t) \right] (3)$ 式中:  $\xi(x,t)$  为自由竖向弯曲振动时箱梁翼板的最大 纵向位移差函数;  $\varphi(x,t)$  为自由竖向弯曲振动时箱梁 截面由弯曲变形引起的角位移。其中  $\overline{y}$  按式(4) 计算:

$$\overline{y} = \begin{cases} y/b & 0 \le y \le b \\ (b + \zeta b - y)/\zeta b & b \le y \le b + \zeta b \end{cases}$$
(4)

#### 2.2 控制微分方程及自然边界条件

波形钢腹板发生自由竖向弯曲振动时的剪切变形 计算见式(5):

$$\nu(x,t) = W'(x,t) - \varphi(x,t)$$
(5)

式中: W(x,t)为自由竖向弯曲振动时整个箱梁横截面的角位移。

波形钢腹板的剪切应变能 V<sub>f</sub> 为:

$$\overline{V}_{\rm f} = \int \frac{G_{\rm s}A_{\rm s}}{2} \gamma^2(x,t) \, \mathrm{d}x \qquad (6)$$

### 式中:A<sub>s</sub>为波形钢腹板的横截面面积。

混凝土上翼板、下翼板的弯曲应变能分别为 $\overline{V}_{u}$ 、 $\overline{V}_{l}$ :

$$\overline{V}_{u} = \frac{1}{2} I_{su} \int \left\{ E_{c} \left[ \varphi'(x,t) \right]^{2} + \frac{3}{2} E_{c} \varphi'(x,t) \xi'(x,t) + E_{c} \frac{9}{14} \left[ \xi'(x,t) \right]^{2} + \frac{9 G_{c} \xi^{2}(x,t)}{5 b^{2}} \right\} dx$$
(7)

$$\overline{V}_{1} = \frac{1}{2} I_{sl} \int \left\{ E_{c} \left[ \varphi'(x,t) \right]^{2} + \frac{3}{2} E_{c} \varphi'(x,t) \xi'(x,t) + \frac{3}{2} E_{c} \varphi'(x,t) \right\}$$

$$E_{c} \frac{9}{14} \left[ \xi'(x,t) \right]^{2} + \frac{9G_{c}\xi^{2}(x,t)}{5b^{2}} \right] dx \qquad (8)$$

式中: *I*<sub>su</sub>与 *I*<sub>sl</sub>分别为箱梁上翼板和下翼板对中性轴的 惯性矩; *E*<sub>c</sub>与 *G*<sub>c</sub>分别为混凝土材料的弹性模量与剪切 模量。

体系的总势能 V 由混凝土上翼板、下翼板的弯曲 应变能  $\overline{V}_{u}$ 、 $\overline{V}_{l}$  及波形钢腹板的剪切应变能  $\overline{V}_{f}$  构成, 即:

$$V = \overline{V}_{u} + \overline{V}_{l} + \overline{V}_{f} =$$

$$\frac{1}{2}E_{c}I\int\left[\varphi\left(x,t\right)\right]^{2}dx + \frac{1}{2}E_{c}I\int\frac{3}{2}\varphi\left(x,t\right)\xi\left(x,t\right)dx +$$

$$\frac{1}{2}E_{c}I\int\frac{9}{14}\left[\xi\left(x,t\right)\right]^{2}dx + \frac{1}{2}E_{c}I\int\frac{9G_{c}}{5E_{c}b^{2}}\left[\xi\left(x,t\right)\right]^{2}dx +$$

$$\frac{1}{2}G_{s}A_{s}\int\left[W\left(x,t\right) - \varphi\left(x,t\right)\right]^{2}dx \qquad (9)$$

式中: *I* = *I*<sub>su</sub> + *I*<sub>sl</sub>为波形钢腹板 PC 箱梁上、下翼板对截 面形心轴的惯性矩之和。

在我国现行的桥规中,主要关注于桥梁的竖向基 频,即桥梁的竖向弯曲振动频率用于计算桥梁所受到 的冲击力。因此,本文也主要关注于波形钢腹板 PC 箱 梁桥的竖向弯曲振动频率,因此箱梁发生竖向弯曲振 动时的动能 T 可表示:

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{W}^2 (\rho_c A_c + \rho_s A_s) \, dx \qquad (10)$$

式中: W为 W(x,t) 对时间的导数;  $\rho_c$ 与  $\rho_s$  分别为混凝 土与钢材的质量密度;  $A_c$  为箱梁上、下翼板的横截面 面积。

由 Hamilton 原理<sup>[21]</sup>:  

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = 0$$
 (11)  
可得:

$$E_{c}I\varphi''(x,t) + \frac{3}{4}E_{c}I\xi''(x,t) +$$

$$G_{s}A_{s}\left[W'(x,t) - \varphi(x,t)\right] = 0 \qquad (12)$$
  
$$G_{s}A_{s}\left[W''(x,t) - \varphi'(x,t)\right] -$$

$$(\rho_c A_c + \rho_s A_s) \ddot{W}(x,t) = 0$$
(13)

$$E_{c}I\left[\frac{9G_{c}}{5E_{c}b^{2}}\xi(x,t) - \frac{9}{14}\xi''(x,t) - \frac{3}{4}\varphi''(x,t)\right] = 0 \quad (14)$$

$$\left[ E_{e}I\varphi'(x,t) + \frac{3}{4}E_{e}I\xi'(x,t) \right] \delta\varphi \big|_{0}^{t} = 0 \quad (15)$$

$$\left[\frac{3}{4}E_{e}I\varphi'(x,t) + \frac{9}{14}E_{e}I\xi'(x,t)\right]\delta\xi|_{0}^{l} = 0 \quad (16)$$

$$G_{s}A_{s}[W(x,t) - \varphi(x,t)]\delta W|_{0}^{l} = 0$$
 (17)

式(12)、式(13) 与式(14) 为波形钢腹板 PC 箱梁 桥发生竖向弯曲振动时的控制微分方程;式(15)、式 (16) 与式(17) 为相应的自然边界条件。

## 2.3 波形钢腹板简支梁自由振动方程的解

设:

$$W(x,t) = W(x)\sin(\omega t + \varphi)$$
(18)

$$\xi(x,t) = \xi(x) \sin(\omega t + \varphi)$$
(19)

$$\varphi(x,t) = \varphi(x) \sin(\omega t + \varphi)$$
 (20)

式中: ω 为圆频率; φ 为初始相位角。将式(18)、式 (19) 及式(20) 代入式(12)、式(13) 与式(14) 可得:

$$W^{(6)}(x,t) + \left(\frac{\overline{m}\omega^2}{G_{\rm s}A_{\rm s}} - \frac{112G_{\rm c}}{5E_{\rm c}b^2}\right)W^{(4)}(x,t) - \left(\frac{8\overline{m}\omega^2}{E_{\rm c}I} + \frac{2\overline{m}\omega^2G_{\rm c}}{112\overline{m}\omega^2G_{\rm c}}\right) + \frac{112\overline{m}\omega^2G_{\rm c}}{112\overline{m}\omega^2G_{\rm c}}$$

$$\frac{112\overline{m}\omega^{2}G_{c}}{5G_{s}A_{s}E_{c}b^{2}}W^{(2)}(x,t) + \frac{112\overline{m}\omega^{2}G_{c}}{5E_{c}^{2}b^{2}I}W(x,t) = 0 \quad (21)$$

式中: $\overline{m} = \rho_c A_c + \rho_s A_s$ 为波形钢腹板 PC 箱梁的单位长 度质量。

因 sin( $\omega t + \varphi$ ) 不恒为零,所以上式可改写为:

$$W^{(6)}(x) + \left(\frac{\overline{m}\omega^{2}}{G_{s}A_{s}} - \frac{112G_{c}}{5E_{c}b^{2}}\right)W^{(4)}(x) - \left(\frac{8\overline{m}\omega^{2}}{E_{c}I} + \frac{112\overline{m}\omega^{2}G_{c}}{5G_{s}A_{s}E_{c}b^{2}}\right)W^{(2)}(x) + \frac{112\overline{m}\omega^{2}G_{c}}{5E_{c}^{2}b^{2}I}W(x) = 0$$
(22)

式中: W(x) 的上标 2,4,6 分别代表对 x 的二阶、四阶及 六阶导数。

为求得多跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥的 竖向弯曲振动频率,首先须求出该类型桥梁简支体系 的竖向弯曲振动频率,将简支梁的振型函数  $W(x) = A_n \sin \frac{n \pi x^{[22]}}{l}$ 代入式(22) 化简可得:

$$\omega = a_1 \sqrt{\frac{E_c I}{m}} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tag{23}$$

$$a_{1} = \frac{\sqrt{1 + \frac{5E_{c}b^{2}}{112G_{c}}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2}}}{\sqrt{1 + \frac{E_{c}I}{G_{s}A_{s}}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2} + \frac{5E_{c}b^{2}}{14G_{c}}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2} + \frac{5E_{c}^{2}b^{2}I}{112G_{c}G_{s}A_{s}}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{4}}}$$
(24)

式中: *a*<sub>1</sub> 为考虑波形钢腹板剪切变形、箱梁剪力滞效应及两者耦合效应的影响系数。

## 2.4 多跨等截面波形钢腹板连续梁自由振动方程 的解

对于多跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥可采

用力法计算其自由振动频率方程。当连续梁按某一频 率ω振动时,其梁上各点均作同步的简谐振动,此时, 梁上各截面的位移和内力均为按频率ω变化的简谐函 数,所以连续梁的力法基本结构见图3,图3中*i*为连 续梁的中间支座数目。



图 3 多跨等截面波形钢腹板 PC 箱梁桥力法基本结构 Fig. 3 Schematic plots of multi-span continuous box girder bridges

根据变形连续条件  $\theta_{n,n-1} = \theta_{n,n+1}$ ,  $\theta$  为弯矩 M 引起的转角,可得波形钢腹板 PC 连续箱梁桥的力法方程:

$$\begin{array}{l}
\left. 4\alpha M_{1} + \beta M_{2} = 0 \\
\beta M_{1} + 4\alpha M_{2} + \beta M_{3} = 0 \\
\beta M_{2} + 4\alpha M_{3} + \beta M_{4} = 0 \\
\dots \\
\beta M_{i-1} + 4\alpha M_{i} = 0 \end{array} \right\}$$
(25)

式中: $\alpha = (\operatorname{coth}\lambda l - \operatorname{cot}\lambda l) /2; \beta = 1/\sin\lambda l - 1/\sinh\lambda l.$ 将式(25) 写为矩阵形式,见式(26),

$$\begin{bmatrix} 4\alpha & \beta & 0\\ \beta & 4\alpha & \beta\\ 0 & \beta & 4\alpha\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$
(26)

式(26)为线性齐次代数方程组,将此行列式展开, 便可得到多跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向 弯曲振动的频率方程,对频率方程进行求解便可获得 其各阶竖向弯曲振动频率。表2列出了多跨等截面波 形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向弯曲振动频率的计算式, 限于篇幅,这里仅列出了该类型桥梁2跨~5 跨前四阶 竖向弯曲振动频率的计算公式。

## 表 2 多跨等截面波形钢腹板连续箱梁桥弯曲振动频率 Tab. 2 Vertical bending vibration frequencies of multi-span continuous girder bridges with CSWs

跨数	自振频率公式
2	$\omega = \frac{a_1}{l^2} (\pi^2, 3.927^2, 4\pi^2, 7.069^2, \cdots) \sqrt{\frac{E_c I}{\overline{m}}}$
3	$\omega = \frac{a_1}{l^2} (\pi^2, 3.549^2, 4.304^2, 4\pi^2, \cdots) \sqrt{\frac{E_e I}{m}}$
4	$\omega = \frac{a_1}{l^2} (\pi^2, 3.393^2, 3.927^2 4.461^2, \cdots) \sqrt{\frac{E_e I}{m}}$
5	$\boldsymbol{\omega} = \frac{a_1}{l^2} (\pi^2, 3.299^2, 3.707^2, 4.147^2, \cdots) \sqrt{\frac{E_c I}{m}}$

### 3 算例验证

#### 3.1 室内模型试验梁验证

在室内实验室制作了两跨等截面波形钢腹板 PC 试验梁,跨径布置为3m+3m,截面尺寸选取已建鄄城 黄河特大桥箱梁跨中截面的横截面尺寸,并按1:10的 比例缩尺制作成等截面梁(见图4)。制作完成的模型 试验梁见图5。



图 4 试验梁的基本尺寸(mm) Fig. 4 Main dimensions of test girder (mm)



图 5 制作完成的试验梁 Fig. 5 The completed test girder

在实验室测得试验梁顶、底板混凝土 28 d 龄期的 抗压强度平均值为 51.2 MPa,按规范规定为 C50 混凝 土。波形钢腹板采用 Q235 钢,厚度为 1.2 mm,弹性模 量为 206 GPa。频率测试见图 6,采样频率为 512 Hz。



图 6 试验梁加速度传感器测点(mm) Fig. 6 Measurement locations on the bridge deck (mm)

采用 MIDAS 有限元软件中自带的波形钢腹板组合 空间梁单元建立了试验梁的有限元模型(见图 7)。



图 7 试验梁的 MIDAS 有限元模型 Fig. 7 MIDAS finite element model of test girder

将本文理论公式计算值与模型试验的实测值及有 限元计算值进行了对比分析,对比结果见表3。

## 表 3 不同方法所得试验梁竖向弯曲振动频率对比结果 Tab. 3 Comparison the results of bending

vibration frequency obtain by different methods

频率 阶数	本文计算 值/Hz	MIDAS 有限元 计算结果/Hz	实测值/Hz
1	54.74	55.65	61.94
2	73.98	75.41	75.94
3	131.03	134.10	-
4	149.72	153.30	_
5	205.17	210.08	-
6	223.52	228.79	-

由于试验梁的制作误差,实际尺寸偏大,造成实测 值与本文所得公式计算值与 MIDAS 有限元值有一定的 偏差,但总体而言吻合情况良好,验证了本文计算方法 的正确性。表 3 中本文所得公式的计算值要略小于 MIDAS 有限元值,是由于 MIDAS 有限元软件中自带的 波形钢腹板组合梁单元中仅考虑了钢腹板的剪切效 应,而未考虑剪力滞效应和耦合效应。

#### 3.2 已建等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥验证

2005年,我国河南省光山县境内修建的泼河大桥 为国内首座装配式波形钢腹板 PC 连续箱梁公路桥,该 桥为4m×30m等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥。 横截面采用4片波形钢腹板 PC 箱梁截面,图8为泼河 大桥单片梁示意图。泼河大桥上、下翼板的混凝土材 料为 C50,波形钢腹板采用 Q355C 级低合金结构钢板, 厚度为8mm。





Fig. 8 A single girder cross section of the Pohe bridge (mm)

采用本文的计算公式计算了泼河大桥前4阶竖向 弯曲振动频率,并与实测值<sup>[23]</sup>及 ANSYS 三维有限元计 算值进行了对比,对比结果见表4。

表 4 不同方法所得泼河大桥竖向弯曲振动频率对比结果 Tab. 4 Comparison the results of vertical bending vibration frequencies of the Pohe bridge obtained by different methods

频率 阶数	本文 计算值/Hz	ANSYS 有限元 计算结果/Hz	实测值/Hz
1	3.453	3.331	3.81
2	3.986	3.852	4.30
3	5.217	5.110	5.27
4	6.563	6.347	-

由表4可知,采用本文计算方法所得的泼河大桥 竖向弯曲振动频率与三维有限元模型计算值及实测值 吻合良好,验证了本文计算方法的正确性。

### 4 参数分析

以本文"3.1"节中所示的波形钢腹板 PC 试验梁尺 寸进行参数分析,将本文计算方法按照是否考虑波形 钢腹板剪切模量修正求得试验梁的前六阶竖向弯曲振 动频率,两者的对比结果见图9。



图 9 是否考虑剪切模量修正所得竖向弯曲振动频率对比图 Fig. 9 Comparison the results obtain by considering shear modulus of elasticity correction or not

由图9可知,是否考虑波形钢腹板剪切模量的修 正,对两跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁竖向弯曲振 动频率的计算结果影响较小,但两者的差值随着频率 阶数的上升而增大。

将试验梁分别按本文计算公式、欧拉梁理论以及 仅考虑剪切变形的铁木辛柯梁理论求得其竖向弯曲振 动频率,并进行对比分析,对比结果见图 10。





由图 10 可知,试验梁按照欧拉梁理论所得的频率 值与本文计算所得频率值相差较大,这是由于本文理 论计算方法考虑了等截面波形钢腹板 PC 箱梁桥的剪 力滞效应、波形钢腹板的剪切变形及两者的耦合效应, 而欧拉梁理论未考虑以上的三种影响因素,这三种影 响因素会降低波形钢腹板 PC 箱梁桥的弯曲刚度,因此 欧拉梁理论所得结果要大于本文理论计算值。铁木辛 柯梁理论仅考虑了波形钢腹板 PC 箱梁桥的波形钢腹

145

Hz

板剪切变形,但所得结果却与本文理论计算值较为接近,说明波形钢腹板 PC 连续箱梁的竖向弯曲振动频率 受波形钢腹板剪切效应的影响较大,而受剪力滞效应 与耦合效应的影响较小。

### 4.1 宽跨比的影响

通过改变试验梁的跨径 *l*,给出了不同宽跨比 (2*b*/*l*)情况下,本文理论公式计算值与仅考虑剪切变 形的铁木辛柯梁理论所得值的分析比较。假定试验梁 波形钢腹板的高度不变,跨径 *l*分别取 1 m,2 m,3 m,4 m,5 m,6 m,相对应的宽跨比(2*b*/*l*)为 0.650,0.325,0.217,0.163,0.130,0.108。由于试验梁是按已建实 桥 1:10 的比例缩尺制作的,当宽跨比为 0.650~0.108

时,对应实桥的跨径为10~60 m。文中对比了试验梁 前六阶竖向弯曲振动频率随宽跨比变化的情况,对比 结果见表5。

表5中①代表本文理论公式计算值; ②代表仅考虑剪切变形的铁木辛柯梁理论所得值。由表5可知, 当两跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁的宽跨比 (2b/l)在0.108~0.650时,仅考虑剪切变形的铁木辛 柯梁理论所得的竖向弯曲振动频率与本文理论公式所 得结果吻合良好。因此在实际工程中当两跨等截面波 形钢腹板 PC 连续箱梁宽跨比(2b/l)在0.108~0.650 时,计算其竖向基频时仅考虑波形钢腹板的剪切效应 即可。

表 5 竖向弯曲振动频率随宽跨比变化对比图 Tab. 5 Comparison the first vertical bending vibration frequencies vary with the width-span ratio

		-			-		-	-		-		
宽跨比	0.	108	0.1	130	0.1	163	0.2	217	0.3	325	0.6	550
频率阶数	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	18.44	18.59	25.1	25.36	35.85	36.33	54.74	55.71	93.17	95.27	205.17	210.38
2	26.84	27.13	35.85	36.33	49.96	50.8	73.98	75.51	121.63	124.58	260.09	266.5
3	54.74	55.71	70.13	71.54	93.17	95.27	131.03	134.26	205.17	210.38	424.02	432.78
4	64.36	65.6	81.67	83.43	107.45	109.98	149.72	153.48	232.67	238.51	478.68	487.87
5	93.17	95.27	115.97	118.75	149.72	153.48	205.17	210.38	314.77	322.18	642.97	652.69
6	102.7	105.09	127.27	130.39	163.66	167.81	223.52	229.15	342.09	349.9	697.81	707.53

#### 4.2 波形形状的影响

假定试验梁的截面尺寸不变,采用本文计算公式 分别计算了试验梁在采用不同型号波形钢腹板情况下 的竖向弯曲振动频率,并进行对比分析,见表6。

表 6 不同的波形形状下试验梁竖向弯曲振动频率对比 Tab. 6 The comparison values the of

dif	ferent wave pat	terns for test gi	rder Hz
频率阶数	1600 型	1200 型	1000 型
1	54.74	54.35	53.94
2	73.98	73.42	72.72
3	131.03	129.81	128.31
4	149.72	148.29	146.52
5	205.17	203.10	200.54
6	223.52	221.24	218.42

由表6可知,波形钢腹板的型号选择对波形钢腹板 PC 连续梁竖向弯曲振动频率的影响较小

### 4.3 与现行规范比较

按照"公路桥涵设计通用规范: JTG D60—2015"里 关于连续梁桥竖向基频的估算公式见式(27)与式 (28),符号的意义详见规范。

$$f_{11} = \frac{13.616}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI_c}{m_c}}$$
(27)

$$f_{12} = \frac{23.651}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI_c}{m_c}}$$
(28)

当计算连续梁的冲击力引起的正弯矩效应和剪力 效应时,采用*f*<sub>11</sub>;计算连续梁的冲击力引起的负弯矩效 应时,采用*f*<sub>12</sub>。以本文制作的两跨波形钢腹板 PC 连续 箱梁为例,采用式(27) 与式(28) 分别计算了*f*<sub>11</sub>与*f*<sub>12</sub>, 并与本文计算方法所得结果进行了对比,对比结果见 表7。

表 7 两跨波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向基频对比 Tab. 7 Comparison the fundamental vibration frequencies obtain by different methods

频率阶数	文中计算值/Hz	$f_{11}/\mathrm{Hz}$	$f_{12}/\mathrm{Hz}$
1	54.74	118.99	206.69

由表 7 可知,*f*<sub>11</sub>,*f*<sub>12</sub>与本文计算方法所得竖向基频 差值较大,因此"公路桥涵设计通用规范: JTG D60— 2015"里关于连续梁桥竖向基频的估算公式不适用于 波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向基频的计算。

## 5 结 论

(1) 本文所得多跨等截面波形钢腹板 PC 箱梁桥 竖向弯曲振动频率计算公式的正确性得到了室内模型 试验值、已建实桥实测值及三维有限元数值模拟的验 证,对于实际工程具有一定的参考价值。

(2) 波形钢腹板剪切模量的修正与否对多跨等截

面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥低阶竖向弯曲振动频率 的影响较小,但随着频率阶数的增加,两者的差值有增 大的趋势。

(3) 多跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向 弯曲振动频率受波形钢腹板剪切效应的影响较大,受 箱梁剪力滞效应与耦合效应的影响较小。在实际工程 中,若该类型桥梁宽跨比(2b/l)为0.108~0.650时,计 算其竖向基频时可仅考虑波形钢腹板的剪切效应。

(4) 在箱梁截面不变的情况下,波形钢腹板型号 选择对多跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向弯 曲振动频率的影响较小。

(5) 多跨等截面波形钢腹板 PC 连续箱梁桥竖向 基频的计算不宜采用现行桥梁规范中给出的连续梁竖 向基频的计算公式。

#### 参考文献

- EASLEY J T. Buckling formulas for corrugated metal shear diaphragms [J]. Journal of the Structural Division, 1975, 101(7): 1403 - 1417.
- [2] JONGWON Y, HEUNGBAE G, KWANGSOO Y, et al. Interactive shear buckling behavior of trapezoidally corrugated steel webs [J]. Engineering Structures, 2008, 30: 1659 – 1666.
- [3] JIHO M, JONGWON Y, BYUNG H C, et al. Shear strength and design of trapezoidally corrugated steel webs [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2009, 65: 1198 – 1205.
- [4] ELGAALY M, SESHADRI A. Depicting the behavior of girders with corrugated webs up to failure using non-linear finite element analysis [J]. Advances in Engineering Software, 1998, 29: 195 – 208.
- [5] KHALID Y A, CHAN C L, SAHARI B B, et al. Bending behaviour of corrugated web beams [J]. Journal of Materials Processing Technology, 2004,150: 242 – 254.
- [6] JIHO M, YI J W, BYUNG H C, et al. Lateral-torsional buckling of I-girder with corrugated webs under uniform bending [J]. Thin-Walled Structures, 2009, 47: 21 – 30.
- [7] ELDIB M E A H. Shear buckling strength and design of curved corrugated steel webs for bridges [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2009, 65: 2129 – 2139.
- [8] NGUYEN N D, HAN S R, LEE G S, et al. Moment modification factor of I-girder with trapezoidal-web-corrugations considering concentrated load height effects [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2011, 67: 1773 – 1787.
- [9] NGUYEN N D, HAN S R, KIM J H, et al. Moment modification factors of I-girder with trapezoidal web corrugations under moment gradient [J]. Thin-Walled Structures, 2012, 57: 1 – 12.
- [10] 吴文清, 叶见曙, 万水. 波形钢腹板组合箱梁在对称加载 作用下剪力滞效应的试验研究[J]. 中国公路学报, 2003, 16(2): 48-51.
  WU Wenqing, YE Jianshu, WAN Shui. Experimental study of chear lag offset of composite her girders with computed

of shear-lag effect of composite box girders with corrugated steel webs  $[\,J\,]$ . China Journal of Highway and Transport, 2003,16(2): 48-51.

[11] 吴文清, 万水, 叶见曙,等. 波形钢腹板组合箱梁剪力滞 效应的空间有限元分析[J]. 土木工程学报,2004,37(9): 31 – 36.

WU Wenqing, WAN Shui, YE Jianshu, et al. 3-D finite element analysis on shear lag effect in composite box girder with corrugated steel web [J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(9): 31 – 36.

 [12] 李宏江, 叶见曙, 万水, 等. 剪切变形对波形钢腹板箱梁 挠度的影响 [J]. 交通运输工程学报, 2002, 2(4):17 - 20.

LI Hongjiang, YE Jianshu, WAN Shui, et al. Influence of shear deformation on deflection of box girder with corrugared steel webs [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2002, 2(4): 17 – 20.

- [13] 聂建国,李法雄. 考虑腹板剪切行为的波形钢腹板梁理 论模型[J]. 中国公路学报, 2011, 24(6): 40-48.
  NIE Jianguo, LI Faxiong. Theory model of corrugated steel web girder considering web shear behavior [J]. China Journal of Highway and Transport, 2011, 24(6): 40-48.
- [14] 聂建国,李法雄,樊健生. 波形钢腹板梁变形计算的有效 刚度法 [J]. 工程力学, 2012, 29(8): 71-79.
  NIE Jianguo, LI Faxiong, FAN Jiansheng. Effective stiffness method for calculating deflection of corrugated web girder [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(8): 71-79.
- [15] 江克斌,丁勇,杨建奎,等.波形钢腹板 PC 组合箱梁纯扭 作用下抗扭承载力试验研究 [J].工程力学,2013,30(6): 175-182.
  JIANG Kebin, DING Yong, YANG Jiankui, et al. Experimental study on ultimate torsional strength of PC composite box-girder with corrugated steel webs under pure torsion [J]. Engineering Mechanics,2013,30(6):175-182.
- [16] 公路桥涵设计通用规范: JTG D60-2015 [S]. 北京: 人民 交通出版股份有限公司, 2015.
- [17] OH J Y, LEE D H, KIM K S. Accordion effect of prestressed steel girders with corrugated webs [J]. Thin-Walled Structures, 2012, 57: 49 - 61.
- [18] SAMANTA A, MUKHOPADHYAY M. Finite element static and dynamic analyses of folded plates [J]. Engineering Structures, 1999, 21:277 – 287.
- [19] 吴文清,叶见曙,万水,等.波形钢腹板-混凝土组合箱梁 截面变形的拟平截面假定及其应用研究[J].工程力学, 2005,22(5):177-178.

WU Wenqing, YE Jianshu, WAN Shui, et al. Quasi plane assumption and its application in steel-concrete composite box girders with corrugated steel webs [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(5): 177 – 178.

- [20] 张士铎,邓小华,王文州. 箱形薄壁梁剪力滞效应[M]. 北 京:人民交通出版社,1998.
- [21] XU Rongqiao, CHEN Dequan. Variational principles of partial-interaction composite beams [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2012, 138(5): 542-550.
- [22] 克拉夫 R, 彭津 J. 结构动力学 [M]. 王光远, 译. 北京: 高 等教育出版社, 2006.
- [23] 李明元. 泼河大桥的施工与动力特性试验研究 [J]. 交通标准化,2006(4):135-138.
  LI Mingyuan. Study on construction and dynamic character istic of Bohe Bridge [J]. Communications Standardization, 2006(4):135-138.